DOI: 10.33693/2313-223X-2023-10-2-9-15

УДК: 530.145

ГРНТИ: 27.41

EDN: AIXNRU


# Описание простейшего немарковского процесса с помощью дифференциального уравнения на вектор квантового состояния


**Ю.И. Ожигов[1, 2 a] ©, Н.Б. Викторова[3, b] ©**

**[1] Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация**

**[2] Физико-технологический институт Российской академии наук имени К.А. Валиева, г. Москва, Российская Федерация**

**[3] Российский государственный гуманитарный университет, г. Москва, Российская Федерация**

**[a] E-mail: ozhigov@cs.msu.ru**

**[b] E-mail: nbvictorova@list.ru**



**Аннотация.** Рассматривается модель Джейнса–Каммингса с одним атомом и фотоном. Происходит утечка фотона из полости (оптического резонатора). Атом может находиться в возбужденном и основном состоянии. Обычно динамика вероятности нахождения фотона в полости рассматривается при помощи квантового основного уравнения Линдблада (далее – КОУ), в котором в качестве неизвестной функции выступает матрица плотности. КОУ описывает квантовый марковский случайный процесс. Целью работы является попытка заменить уравнение от матрицы плотности на эрзац уравнения Линдблада, представляющий собой дифференциальное уравнение от волнового вектора состояния. КОУ предполагает использование матрицы с размерностью, равной размерности пространства состояний, что увеличивает сложность вычислений, поскольку требует квадратично большой памяти. Например, для размерности основного пространства равного миллиарду, память, требуемая для решения КОУ, составит около квинтиллиона, что составляет проблему даже для суперкомпьютерных вычислений. Тогда как столбец длины в миллиард легко помещается в памяти персонального компьютера и может легко обрабатываться на персональном ноутбуке. *Методология* заключается в построении дифференциального уравнения на вектор состояния, по форме напоминающего КОУ. Эрзац КОУ, который строится нами, не может в точности описать динамику матрицы плотности и, следовательно, не может служить точной заменой КОУ. *Достигнутый результат*: построен эрзац КОУ, который описывает специальный процесс обмена оптической полости с окружающей средой, при котором вылетевший из полости фотон может возвратиться обратно.



**Ключевые слова:** квантовая информатика, уравнение Линдблада, система дифференциальных уравнений, собственные вектора и собственные значения, рабиевские осцилляции, модель Джейнса–Каммингса

ССЫЛКА НА СТАТЬЮ: Ожигов Ю.И., Викторова Н.Б. Описание простейшего немарковского процесса с помощью дифференциального уравнения на вектор квантового состояния // Computational Nanotechnology. 2023. Т. 10. № 2. С. 9–15. DOI: 10.33693/2313-223X-2023-10-2-9-15. EDN: AIXNRU

DOI: 10.33693/2313-223X-2023-10-2-9-15

# Description of the Simplest Non-Markov Process Using a Differential Equation for the Quantum State Vector

**Yu.I. Ozhigov[1, 2 a] ©, N.B. Victorova[3, b] ©**

[1] **Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation**

[2] **Valiev Institute of Physics and Technology of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation**

[3] **Russian State University for the Humanities, Moscow, Russian Federation**

[a] **E-mail: ozhigov@cs.msu.ru**

[b] **E-mail: nbvictorova@list.ru**

**Abstract.** The Jaynes–Cummings model with one atom and a photon is considered. A photon leaks out of the cavity (optical resonator). An atom can be in an excited and ground state. Usually, the dynamics of the probability of finding a photon in a cavity is considered using the basic quantum Lindblad equation, in which the density matrix acts as an unknown function. The Lindblad equation describes a quantum Markov random process. The article attempts to replace the equation from the density matrix with an ersatz of the Lindblad equation, which is a differential equation from the state wave vector. The quantum master equation involves the use of a matrix with a dimension equal to the dimension of the state space, which increases the complexity of the calculations, since it requires a quadratically large memory. For example, for the dimension of the main space equal to a billion, the memory required to solve the basic quantum equation will be about a quintillion, which is a problem even for supercomputers. Whereas a billion-long column fits easily into the memory of a personal computer and can be easily processed on a personal laptop. The ersatz of the quantum master equation, which we are constructing, cannot accurately describe the dynamics of the density matrix and therefore cannot serve as an exact replacement for the quantum master equation. Our ersatz will describe a special process of exchange with the environment.

**Key words:** quantum informatics, Lindblad equation, system of differential equations, eigenvectors and eigenvalues, Rabi oscillations, Jaynes–Cummings model

FOR CITATION: Ozhigov Yu.I., Victorova N.B. Description of the Simplest Non-Markov Process Using a Differential Equation for the Quantum State Vector. *Computational Nanotechnology*. 2023. Vol. 10. No. 2. Pp. 9–15. (In Rus.) DOI: 10.33693/2313-223X-2023-10-2-9-15. EDN: AIXNRU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается модель Джейнса–Каммингса [Jaynes, Cummings, 1963; Cummings, 2013; Scovoroda, Ozhigov, Victorova, 2016; Ожигов, 2020: 55] с одним атомом и фотоном. Унитарная динамика в полости описывается с помощью уравнения Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle, \qquad (1)$$

где $|\psi\rangle$ – волновой вектор квантового состояния;

$\hbar$ – постоянная Планка;

$H$ – гамильтониан.

Уравнение Шредингера описывает унитарную эволюцию квантовых состояний, тогда как квантовое основное уравнение Линдблада (далее КОУ) для матрицы плотности ρ описывает неунитарную (необратимую) эволюцию системы. Оно получается из уравнения Шредингера для матрицы плотности с добавлением оператора декогерентности (отвечающего за контакт системы с внешней средой) $\mathcal{L}(\rho)$, домноженного на комплексную единицу, и имеет вид

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H, \rho] + i\mathcal{L}(\rho),$$

где $\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ – матрица плотности;

$[H, \rho] = H\rho - \rho H$ – коммутатор.

В статье [Viktorova, Ozhigov, Skovoroda, Skurat, 2019] рассмотрено аналитическое решение КОУ для одного атома и одного фотона. Ставится задача заменить КОУ на некий эрзац и решить его. Отказ от КОУ обусловлен необходимостью рассматривать сложные системы и процессы на квантовом уровне. Сложность такого анализа растет экспоненциально с ростом числа реальных частиц, и потому необходимо использовать

все возможности для редукции сложности. КОУ хорошо работает для простых систем из одного-двух десятков кубитов, где есть великолепно отлаженные программные инструменты, например, пакеты, реализующие метод Розенброка. Однако для большего числа частиц эти методы не работают. Для размерности пространства состояний порядка миллиарда (динамика пары несложных молекул) матрица плотности будет состоять из квинтиллиона чисел, при этом не являясь разреженной. С другой стороны, матрица плотности сама по себе является избыточной, так как содержит в себе два типа вероятности: классическую – в форме смешанных состояний, и квантовую – встроенную в волновые функции чистых компонент матрицы плотности. Это обусловливает интерес к построению так называемых эрзацев КОУ – методов описания квантовой эволюции открытой системы с помощью вектора состояний вместо матрицы плотности. Первый шаг на этом пути сделан в работе [Ozhigov, Jiangchuan, 2023], где предложен итерационный алгоритм эволюции матрицы плотности, дающей ту же асимптотику базисных состояний, что и КОУ. Этот алгоритм не является решение никакого дифференциального уравнения, и потому к нему невозможно применить стандартные численные методы решения таких уравнений. К тому же, для любого эрзаца у нас нет возможности сохранить точное соответствие с КОУ, так как вектор состояния в принципе не может отобразить понятие смешанного состояния. В данной работе предлагается эрзац КОУ, основанный на решении специального дифференциального уравнения. Оно описывает такой процесс обмена фотоном между оптической квантоводинамической полостью (КЭД полость) и окружением, при котором фотон после вылета из полости возвращается обратно, например, отразившись от внешнего зеркала и сохранив когерентность с атомами внутри полости. Мы не знаем, когда фотон вернется в полость, и должны сохранять возможность полного описания состояния атомов без учета вылетевшего фотона. Эти противоречивые требования ведут к нарушению нормировки вектора состояния в ходе решения нашего уравнения, что требует нормировки решения. Поэтому динамика вектора состояния не является точным решением, она получается из решения задачи Коши домножением на нормирующий множитель.

Методология построения эрзаца КОУ заключается в том, чтобы строить дифференциальное уравнение, отличающееся от уравнения Шредингера на вектор состояния только одним дополнительным слагаемым, отражающим обмен фотонами между полостью и окружением. Вид этого слагаемого соответствует оператору декогерентности в КОУ. Данный эрзац имеет простейший вид обыкновенного дифференциального уравнения на чистое состояние, близкий к КОУ. Его решение соответствует здравому смыслу физической задачи, рассмотренной нами: оптическая полость обменивается фотонами со своим окружением.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение Линдблада [Ожигов, 2020: 38]

$$ih\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = [H,\ \rho] + i\zeta(\rho), \tag{2}$$

где $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ – матрица плотности; $H$ – гамильтониан системы,

$$\zeta(\rho) = \gamma\left(a^{-}\rho a^{+} - \frac{1}{2}\{\rho,\ a^{+}a\}\right).$$

Определим операторы $a^{+}$, $a^{-}$ рождения и уничтожения фотонов, действующих на левый кубит, формулами

$$a^{+}a^{-}|n\rangle = n|n\rangle;$$
$$a^{-}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle; \quad a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle.$$

Антикоммутатор $\{A, B\}$ определяется выражением $\{A, B\} = AB + BA$.

Базисными состояниями в системе являются двухкубитные векторы $|n, at\rangle$, где $n$ – число фотонов в полости, at – возбуждение атома. Вектор состояния

$$|\psi\rangle = \lambda_0(t)|00\rangle + \lambda_1(t)|01\rangle + \lambda_2(t)|10\rangle,$$

где $\lambda_0(t)$ – амплитуда состояния $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = |00\rangle$;

$\lambda_1(t)$ – амплитуда состояния $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = |01\rangle$;

$\lambda_2(t)$ – амплитуда состояния $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = |10\rangle$;

$|00\rangle$ означает состояние «фотона в полости нет, атом в основном состоянии»;

$|01\rangle$ означает состояние «фотона нет, атом в возбужденном состоянии»;

$|10\rangle$ означает состояние «фотон в полости, атом в основном состоянии».

Таким образом,

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\lambda_0(t)\\ \lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение относительно волнового вектора $|\psi\rangle$. Это уравнение является эрзацем КОУ

$$ih\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle + i\gamma a|\psi\rangle. \tag{3}$$

Решим это уравнение. Для этого подставим в него все необходимые матрицы. Так как

$$a|00\rangle = 0; \quad a|01\rangle = 0; \quad a|10\rangle = |00\rangle,$$

то матрица оператора уничтожения фотонов имеет вид

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $a^+$ симметрична. Гамильтониан $H$ системы находится аналогично, как в [Viktorova, Ozhigov, Skovoroda, Skurat, 2019], где $g$ – интенсивность взаимодействия атома и поля. Поэтому

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & hw & g \\ 0 & g & hw \end{pmatrix}.$$

Подставляем в (3)

$$ih\begin{pmatrix} \dot\lambda_0 \\ \dot\lambda_1 \\ \dot\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & hw & g \\ 0 & g & hw \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + i\gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix};$$

$$ih\begin{pmatrix} \dot\lambda_0 \\ \dot\lambda_1 \\ \dot\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ hw\lambda_1(t) + g\lambda_2(t) \\ g\lambda_1(t) + hw\lambda_2(t) \end{pmatrix} + i\gamma\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} ih\dot\lambda_0(t) = i\gamma\lambda_2(t); \\ ih\dot\lambda_1(t) = hw\lambda_1(t) + g\lambda_2(t); \\ ih\dot\lambda_2(t) = g\lambda_1(t) + hw\lambda_2(t). \end{cases}$$

Положим $h = 1$, $w = 1$. Тогда

$$\begin{cases} \dot\lambda_0 = 0\lambda_0 + 0\lambda_1 + \gamma\lambda_2; \\ \dot\lambda_1 = 0\lambda_0 - i\lambda_1 - ig\lambda_2; \\ \dot\lambda_2 = 0\lambda_0 - ig\lambda_1 - i\lambda_2. \end{cases}$$

Зададим начальные условия $\lambda_0(0) = \lambda_2(0) = 0$, $\lambda_1(0) = 1$.

Будем считать, что $g \ll h\omega$. При наших договоренностях $g \ll 1$.

Предполагается, что $\gamma > 0$, $g > 0$. Тогда матрица правой части системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & -i & -ig \\ 0 & -ig & -i \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$|A - kE| = \begin{vmatrix} -k & 0 & \gamma \\ 0 & -i-k & -ig \\ 0 & -ig & -i-k \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель

$$k\begin{vmatrix} i+k & ig \\ ig & i+k \end{vmatrix} = 0.$$

Имеем корни характеристического уравнения $k_0 = 0$, $k_1 = -i - ig$, $k_2 = -i + ig$. Решая соответствующие однородные системы, находим собственные векторы. Имеем:

- $X_0$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $k_0 = 0$,

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

- $X_1$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $k_1 = -i - ig$,

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma}{i(1+g)} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

- $X_2$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $k_2 = -i + ig$,

$$X_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\gamma}{i(1-g)} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Записываем общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \lambda_0(t) \\ \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} = C_0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{0t} +$$

$$+ C_1\begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma}{i(1+g)} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{(-i-ig)t} + C_2\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma}{i(1-g)} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{(-i+ig)t}.$$

Осталось решить задачу Коши с начальными условиями $\lambda_0(0) = \lambda_2(0) = 0$, $\lambda_1(0) = 1$. Для этого находим константы

$$C_0 = \frac{g\gamma i}{1-g^2}; \quad C_1 = \frac{1}{2}; \quad C_2 = \frac{1}{2}.$$

Поэтому частное решение, то есть решение задачи Коши, имеет вид

$$\lambda_0(t) = \frac{g\gamma i}{1-g^2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma i}{1+g}e^{(-i-ig)t} - \frac{1}{2}\frac{\gamma i}{1-g}e^{(-i+ig)t};$$

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2}e^{(-i-ig)t} + \frac{1}{2}e^{(-i+ig)t};$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{2}e^{(-i-ig)t} - \frac{1}{2}e^{(-i+ig)t}.$$

Преобразуем $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, используя формулу Эйлера

$$\lambda_0(t) = \frac{g\gamma i}{1-g^2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma i}{1+g}e^{(-i-ig)t} - \frac{1}{2}\frac{\gamma i}{1-g}e^{(-i+ig)t} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma\sin(1+g)t}{1+g} - \frac{1}{2}\frac{\gamma\sin(1-g)t}{1-g}\right) +$$
$$+ i\left(\frac{g\gamma}{1-g^2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma\cos(1+g)t}{1+g} - \frac{1}{2}\frac{\gamma\cos(1-g)t}{1-g}\right);$$

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{2}e^{(-i-ig)t} + \frac{1}{2}e^{(-i+ig)t} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(1+g)t + \cos(1-g)t\right) -$$
$$- \frac{i}{2}\left(\sin(1+g)t + \sin(1-g)t\right);$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{2}e^{(-i-ig)t} - \frac{1}{2}e^{(-i+ig)t} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(1+g)t - \cos(1-g)t\right) -$$
$$- \frac{i}{2}\left(\sin(1+g)t - \sin(1-g)t\right).$$

Найдем квадрат модуля каждой функции. Тогда

$$|\lambda_0(t)|^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{\gamma\sin(1+g)t}{1+g} + \frac{1}{2}\frac{\gamma\sin(g-1)t}{1-g}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{g\gamma}{1-g^2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma\cos(1+g)t}{1+g} - \frac{1}{2}\frac{\gamma\cos(g-1)t}{1-g}\right)^2 =$$
$$= \frac{\gamma^2}{4(1+g)^2} + \frac{\gamma^2}{4(1-g)^2} - \frac{\gamma^2\cos 2gt}{2(1-g^2)} + \frac{\gamma^2 g^2}{(1-g^2)^2} +$$
$$+ \frac{g\gamma^2\cos(g+1)t}{(1-g^2)(1+g)} - \frac{\gamma^2 g\cos(g-1)t)}{(1-g^2)(1-g)}.$$

$$|\lambda_1(t)|^2 = (\cos(gt))^2; \quad |\lambda_2(t)|^2 = (\sin(gt))^2.$$

Отметим, что $|\lambda_0(t)|^2 + |\lambda_1(t)|^2 + |\lambda_2(t)|^2 = |\lambda_0(t)|^2 + 1$. То есть наше решение не нормированное. Нормируем вектор. Имеем

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_0(t)}{\sqrt{\lambda_0^2(t)+1}} \\ \frac{\lambda_1(t)}{\sqrt{\lambda_0^2(t)+1}} \\ \frac{\lambda_2(t)}{\sqrt{\lambda_0^2(t)+1}} \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Отметим, что если $\gamma = 0$, то уравнение (3) сводится к уравнению Шредингера. В этом случае $\lambda_0(t) = 0$, $\lambda_1(t) = (\cos(gt))^2$, $\lambda_1(t) = (\sin(gt))^2$. И имеют место рабиевские осцилляции.

Рассмотрим вектор

$$\begin{pmatrix} \frac{|\lambda_0(t)|^2}{|\lambda_0(t)|^2+1} \\ \frac{(\cos(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1} \\ \frac{(\sin(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1} \end{pmatrix}.$$

Этот вектор уже нормирован. Построим функции

$$f_1(t) = \frac{|\lambda_0(t)|^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}; \quad f_2(t) = \frac{(\cos(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1};$$

$$f_3(t) = \frac{(\sin(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}$$

для $\gamma = 1$, $g = 0{,}5$.

Мы видим (рис. 1), что состояние «фотона нет, атом в возбужденном состоянии» ($|01\rangle$, график 2) имея преобладающий размах вероятности, осциллирует в паре с состоянием «фотона в полости нет, атом в основном состоянии» ($|00\rangle$, график 1), причем последнее состояние имеет меньшую максимальную амплитуду. В сложной осцилляции участвует состояние «фотон в полости, атом в основном состоянии» ($|10\rangle$, график 3), которое осциллирует не по синусоидальному закону, как первые два. У этого третьего состояние есть два заметных горба; это связано с характером динамики фотона: он вылетает из полости и влетает обратно.

Характер найденной динамики полностью согласуется со здравым смыслом, что является хорошим аргументом в пользу нашей модели эрзаца КОУ.

## 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эта модель отражает немарковский процесс, когда фотон вылетает из полости, и тот же фотон возвращается обратно. Это также можно представить себе как отражение фотона от зеркала, которое находится вне полости Достоинством предложенной нами модели является то, что она основана на решении дифференциального уравнения того же порядка сложности, что и размерность пространства состояний; эта размерность не растет как квадрат, что имеет место для КОУ. Относительная узость применения нашего метода (вылет фотона и возврат в полость) характерна и для других подходов к построению эрзаца КОУ (как, например, в [Ozhigov, Jiangchuan,2023]); видимо, такое ограничение общности неизбежно. Но модель динамики, основанная на решении задачи Коши для сравнительно простого дифференциального уравнения может использовать хорошо разработанные вычислительные методы и отлаженные пакеты компьютерных программ.

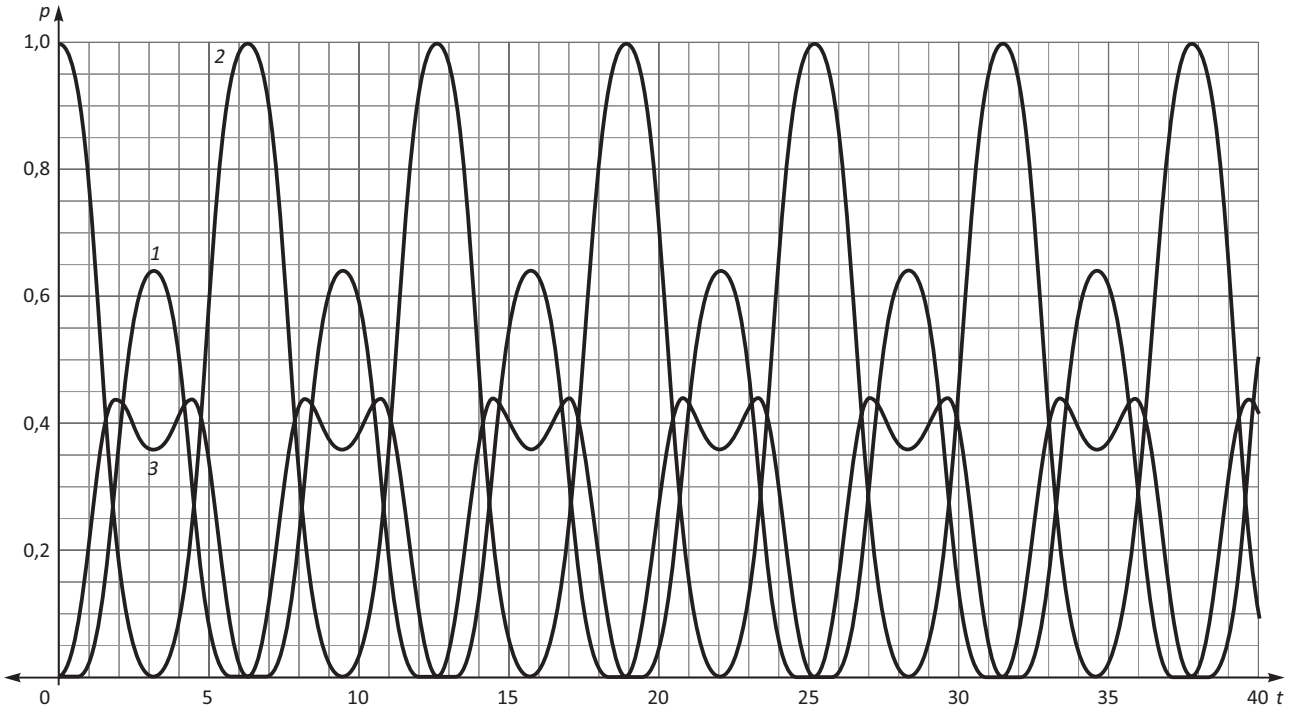



**Рис. 1**

*1* – график $f_1(t)=\frac{|\lambda_0(t)|^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}$ ; *2* – график $f_2(t)=\frac{(\cos(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}$ ; *3* – график $f_3(t)=\frac{(\sin(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}$

**Fig. 1**

*1* – graph $f_1(t)=\frac{|\lambda_0(t)|^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}$ ; *2* – graph $f_2(t)=\frac{(\cos(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}$ ; *3* – graph $f_3(t)=\frac{(\sin(gt))^2}{|\lambda_0(t)|^2+1}$

### *Литература*

1. *Ozhigov Yu.*, *You J*. Description of the non-Markovian dynamics of atoms in terms of a pure state // Computational Mathematics and Modeling. 2023. URL: https://arxiv.org/pdf/2305.00564.pdf
2. *Jaynes E.T.*, *Cummings F.W*. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser // Proc. IEEE. 1963. Vol. 51. No. 1. Pp. 89–109. DOI: 1.0.1109/PROC.1963.1664
3. *Cummings F.W.* Reminiscing about thesis work with E.T. Jaynes at Stanford* in the 1950s // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2013. Vol. 46. No. 22. P. 220202(3pp). DOI: 10.1088/0953-4075/46/22/220202
4. *Ожигов Ю.И*. Квантовый компьютер.М.: Макс Пресс, 2020, 172 с. ISBN: 9788-5-317-06405-7
5. *Scovoroda N.A.*, *Ozhigov Yu.I.*, *Victorova N.B.* Quantum revivals of a non-rabi type in a Jaynes–Cummings model // Theoretical and Mathematical Physics. 2016. No. 189 (2). Pp. 1673–1679.
6. *Viktorova N.*, *Ozhigov Yu.I.*, *Skovoroda N.A.*, *Skurat K.N*. Analytical solution of the quantum master equation for the Jaynes–Cummings model // Computational Mathematics and Modeling. 2019. Vol. 30. No. 1. Pp. 68–79. URL: https://rdcu.be/bfRRR

### *References*

1. *Ozhigov Yu.*, *You J*. Description of the non-Markovian dynamics of atoms in terms of a pure state. *Computational Mathematics and Modeling*. 2023. URL: https://arxiv.org/pdf/2305.00564.pdf
2. *Jaynes E.T.*, *Cummings F.W*. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proc. IEEE*. 1963. Vol. 51. No. 1. Pp. 89–109. DOI: 1.0.1109/PROC.1963.1664
3. *Cummings F.W.* Reminiscing about thesis work with E.T. Jaynes at Stanford in the 1950s. *Journal of Physics B*: *Atomic, Molecular and Optical Physics*. 2013. Vol. 46. No. 22. P. 220202(3pp). DOI: 10.1088/0953-4075/46/22/220202
4. *Ozhigov Y.* Quantum computer. Moscow: Max Press, 2020. 172 p. ISBN: 9788-5-317-06405-7
5. *Scovoroda N.A.*, *Ozhigov Yu.I.*, *Victorova N.B.* Quantum revivals of a non-rabi type in a Jaynes–Cummings model. *Theoretical and Mathematical Physics*. 2016. No. 189 (2). Pp. 1673–1679.
6. *Viktorova N.*, *Ozhigov Yu.I.*, *Skovoroda N.A.*, *Skurat K.N*. Analytical solution of the quantum master equation for the Jaynes–Cummings model. *Computational Mathematics and Modeling*. 2019. Vol. 30. No. 1. Pp. 68–79. URL: https://rdcu.be/bfRRR

* Leland Stanford Junior University («Стэнфордский Университет») признана нежелательной организацией на территории Российской Федерации.

Статья проверена программой Антиплагиат. Оригинальность – 87%

Р е ц е н з е н т : *Трофимов В.А.*, доктор физико-математических наук, профессор; профессор кафедры вычислительных методов, заведующий лабораторией математического моделирования в физике факультета ВМиК Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Статья поступила в редакцию 04.05.2023, принята к публикации 12.06.2023
The article was received on 04.05.2023, accepted for publication 12.06.2023

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

***Ожигов Юрий Игоревич***, доктор физико-математических наук; профессор кафедры суперкомпьютеров и квантовой информатики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова; ведущий научный сотрудник Физико-технологического института Российской академии наук имени К.А. Валиева. Москва, Российская Федерация. E-mail: ozhigov@cs.msu.ru

***Викторова Надежда Борисовна***, кандидат физико-математических наук; доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета информационных систем и безопасности Института информационных наук и технологий безопасности Российского государственного гуманитарного университета. Москва, Российская Федерация. Author ID: 4690; E-mail: nbvictorova@list.ru

## ABOUT THE AUTHORS

***Yuri I. Ozhigov***, Doctor of Physics and Mathematics; Professor at the Department of Supercomputers and Quantum Informatics of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of the Lomonosov Moscow State University; leading researcher at the Valiev Institute of Physics and Technology of Russian Academy of Sciences. Moscow, Russian Federation. E-mail: ozhigov@cs.msu.ru

***Nadezda B. Victorova***, Candidate of Physics and Mathematics; associated professor at the Department of Fundamental and Applied Mathematics of the Faculty of Information Systems and Security of the Institute of IT and Security Technologies of the Russian State University for the Humanities. Moscow, Russian Federation. Author ID: 4690; E-mail: nbvictorova@list.ru